

TEOREMA DI DE GIORGI

1. TEOREMA DI DE GIORGI

Siano Ω un aperto in \mathbb{R}^d e $f \in L^1(\Omega)$. Ricordiamo che una funzione $u \in H^1(\Omega)$ è una soluzione debole del problema

$$-\operatorname{div}(A(x)\nabla u) = f \quad \text{in } \Omega,$$

se

$$\int_{\Omega} \nabla u A(x) [\nabla v]^t dx = \int_{\Omega} f(x)v dx \quad \text{per ogni } v \in H_0^1(\Omega),$$

dove in questa sezione la matrice

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1d}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d1}(x) & \dots & a_{dd}(x) \end{pmatrix}$$

è una matrice simmetrica ed uniformemente ellittica a coefficienti variabili

$$a_{ij} \equiv a_{ji} : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{per } 1 \leq i, j \leq d,$$

che sono funzioni misurabili su Ω tali che

$$(1) \quad c_A \operatorname{Id} \leq A(x) \leq C_A \operatorname{Id} \quad \text{per ogni } x \in \Omega,$$

dove $0 < c_A \leq C_A$ sono costanti.

In questa nota dimostreremo il teorema seguente.

Teorema 1 (De Giorgi). *Siano Ω un aperto in \mathbb{R}^d e $A(x)$ una matrice simmetrica a coefficienti variabili su Ω che soddisfa (1). Sia $u \in H^1(\Omega)$ una soluzione di*

$$-\operatorname{div}(A(x)\nabla u) = 0 \quad \text{in } \Omega,$$

Allora

$$u \in C^{0,\alpha}(\Omega),$$

ovvero per ogni $x_0 \in \Omega$ esistono un raggio $r > 0$ ed una costante $L > 0$ tali che

$$|u(x) - u(y)| \leq L|x - y|^\alpha \quad \text{per ogni } x, y \in B_r(x_0).$$

Osserviamo che vale anche il seguente teorema più generale.

Teorema 2 (De Giorgi). *Siano Ω un aperto in \mathbb{R}^d e $A(x)$ una matrice simmetrica a coefficienti variabili su Ω che soddisfa (1). Sia $u \in H^1(\Omega)$ una soluzione di*

$$-\operatorname{div}(A(x)\nabla u) = f \quad \text{in } \Omega,$$

dove $f \in L^p(\Omega)$ con $p > d/2$. Allora

$$u \in C^{0,\alpha}(\Omega),$$

ovvero per ogni $x_0 \in \Omega$ esistono un raggio $r > 0$ ed una costante $L > 0$ tali che

$$|u(x) - u(y)| \leq L|x - y|^\alpha \quad \text{per ogni } x, y \in B_r(x_0).$$

2. DISUGUAGLIANZE DI CACCIOPPOLI

Lemma 3 (Disuguaglianza di Caccioppoli). *Se $u \in H^1(B_1)$ è soluzione del problema*

$$-\operatorname{div}(A(x)\nabla u) = f \quad \text{in } B_1,$$

dove

$$c_A \operatorname{Id} \leq A(x) \leq C_A \operatorname{Id} \quad \text{per ogni } x \in \Omega,$$

Allora, per ogni $\varphi \in C_c^\infty(B_1)$ si ha

$$c_A \int_{B_1} |\nabla(\varphi u)|^2 dx \leq C_A \int_{B_1} |\nabla\varphi|^2 u^2 dx + \int_{B_1} \varphi^2 u f dx.$$

Lemma 4 (Disuguaglianza di Caccioppoli II). *Se $u \in H^1(B_1)$ è soluzione del problema*

$$-\operatorname{div}(A(x)\nabla u) = f \quad \text{in } B_1,$$

dove

$$c_A \operatorname{Id} \leq A(x) \leq C_A \operatorname{Id} \quad \text{per ogni } x \in \Omega,$$

Allora, per ogni $\varphi \in C_c^\infty(B_1)$ e per ogni $t \in \mathbb{R}$ si ha

$$c_A \int_{B_1} |\nabla(\varphi(u-t)_+)|^2 dx \leq C_A \int_{B_1} |\nabla\varphi|^2 (u-t)_+^2 dx + \int_{B_1} \varphi^2 (u-t)_+ f dx.$$

3. STIMA $L^2 - L^\infty$

Lemma 5. *Sia $u \in H^1(B_\rho)$ una soluzione di*

$$-\operatorname{div}(A(x)\nabla u) = 0 \quad \text{in } B_\rho,$$

dove la matrice A è tale che:

$$c_A \operatorname{Id} \leq A(x) \leq C_A \operatorname{Id} \quad \text{per ogni } x \in B_\rho.$$

Allora,

$$\|u_+\|_{L^\infty(B_{\rho/2})}^2 \leq \kappa_A^{d/2} C_d \int_{B_\rho} u_+^2 dx,$$

dove $\kappa_A = \frac{C_A}{c_A}$.

Proof. Dimosteremo il lemma in dimensione $d \geq 3$.

- Siano $\varphi \in C_c^\infty(B_1)$ e $T > 0$. Allora

$$\int |\nabla(\varphi(u-T)_+)|^2 dx \leq \kappa_A \int |\nabla\varphi|^2 (u-T)_+^2 dx.$$

- Usando la disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg-Sobolev, dedurre che

$$\left(\int (\varphi(u-T)_+)^{\frac{2d}{d-2}} dx \right)^{\frac{d-2}{d}} \leq \kappa_A C_d \int |\nabla\varphi|^2 (u-T)_+^2 dx.$$

- Ora, supponiamo che

$$\varphi = 1 \quad \text{in } B_r, \quad 0 \leq \varphi \leq 1 \quad \text{in } B_R \setminus B_r, \quad \varphi = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^d \setminus B_R.$$

Quindi

$$\kappa_A C_d \int_{B_R} |\nabla\varphi|^2 (u-T)_+^2 dx \leq \frac{\kappa_A C_d}{(R-r)^2} \int_{B_R} (u-T)_+^2 dx$$

ed anche

$$\int_{B_r} (u-T)_+^2 dx \leq |\Omega_T \cap B_r|^{\frac{2}{d}} \left(\int_{B_r} (u-T)_+^{\frac{2d}{d-2}} dx \right)^{\frac{d-2}{d}} \leq |\Omega_T \cap B_r|^{2/d} \left(\int_{B_R} (\varphi(u-T)_+)^{\frac{2d}{d-2}} dx \right)^{\frac{d-2}{d}}$$

Di conseguenza,

$$\int_{B_r} (u-T)_+^2 dx \leq |\Omega_T \cap B_r|^{2/d} \frac{\kappa_A C_d}{(R-r)^2} \int_{B_R} (u-T)_+^2 dx.$$

- Consideriamo ora $t \in (0, T)$ e stimiamo il termine di misura:

$$|\Omega_T \cap B_r| = \int_{B_r \cap \Omega_T} 1 dx \leq \frac{1}{(T-t)^2} \int_{B_r \cap \Omega_T} (u-t)_+^2 dx \leq \frac{1}{(T-t)^2} \int_{B_r} (u-t)_+^2 dx$$

- In conclusione,

$$(2) \quad \int_{B_r} (u-T)_+^2 dx \leq \frac{\kappa_A C_d}{(R-r)^2 (T-t)^{4/d}} \left(\int_{B_R} (u-t)_+^2 dx \right)^{1+\frac{2}{d}}.$$

- Ora, possiamo scrivere la nostra stima iterativa. Per ogni $k \geq 1$ definiamo

$$R_k = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{k+1}}\right)R \quad \text{e} \quad T_k = T\left(1 - \frac{1}{2^k}\right).$$

In particolare,

$$T_0 = 0, \quad R_0 = R, \quad T_\infty = T, \quad R_\infty = \frac{R}{2}.$$

Ponendo

$$M_k = \int_{B_{R_k}} (u - T_k)_+^2 dx$$

e usando (2), otteniamo

$$M_{k+1} \leq \frac{\kappa_A C_d}{R^2 T^{4/d}} \left(4^{1+\frac{2}{d}}\right)^k M_k^{1+\frac{2}{d}}.$$

- Il lemma di De Giorgi ora implica che se

$$M_0 = \int_{B_R} u^2 dx \leq \frac{C_d}{\kappa_A^{d/2}} (R^2 T^{4/d})^{d/2} = \frac{C_d}{\kappa_A^{d/2}} R^d T^2,$$

allora

$$\int_{B_{R/2}} (u - T)_+^2 dx = 0,$$

ovvero

$$\|u_+\|_{L^\infty(B_{R/2})}^2 \leq \kappa_A^{d/2} C_d \int_{B_R} u_+^2 dx. \quad \square$$

Corollario 6. Se $u \in H^1(\Omega)$ è una soluzione di

$$-\operatorname{div}(A(x)\nabla u) = 0 \quad \text{in } \Omega,$$

allora u è localmente limitata in Ω .

4. STIMA DELLA MISURA DEGLI INSIEMI DI LIVELLO

Esercizio 7. Sia Ω un insieme di misura finita in \mathbb{R}^d . Allora

$$\int_{\Omega} \frac{dx}{|x|^{d-1}} \leq C_d |\Omega|^{1/d},$$

dove C_d è una costante dimensionale.

Lemma 8. Siano $B_R \subset \mathbb{R}^d$ e $u \in C^1(B_R)$ una funzione tale che

$$0 \leq u \leq 1 \quad \text{su } B_R.$$

Allora

$$|\{u = 0\} \cap B_R| |\{u = 1\} \cap B_R|^{1-\frac{1}{d}} \leq C_d |B_R| \int_{B_R} |\nabla u| dx,$$

dove C_d è una costante dimensionale.

Proof. Sia $x_0 \in B_R \cap \{u = 1\}$. Stimeremo il volume di $\{u = 0\}$ in B_R in termini di $|\nabla u|$. Poniamo

$$\varphi(x) := u(x - x_0), \quad \varphi : B_R(-x_0) \rightarrow \mathbb{R},$$

e osserviamo che possiamo scrivere gli insiemi $B_R(-x_0)$ e $B_R(-x_0) \cap \{\varphi = 0\}$ in coordinate polari come

$$B_R(-x_0) := \{(r, \theta) : \theta \in \partial B_1, \quad r \in [0, R_\theta]\},$$

$$B_R(-x_0) \cap \{\varphi = 0\} := \{(r, \theta) : \theta \in \partial B_1, \quad r \in I_\theta\},$$

dove per ogni θ , $[0, R_\theta]$ è un intervallo e I_θ è un chiuso in \mathbb{R} .

Ora, per ogni punto

$$x = (r, \theta) \in \{\varphi = 0\},$$

abbiamo che

$$1 = |\varphi(x) - \varphi(0)| = |\varphi(r\theta) - \varphi(0)| \leq \left| \int_0^r \theta \cdot \nabla \varphi(s\theta) ds \right| \leq \int_0^r |\nabla \varphi|(s\theta) ds.$$

Integrando su $\{\varphi = 0\}$, abbiamo che

$$\begin{aligned}
|\{u = 0\} \cap B_R| &= |\{\varphi = 0\} \cap B_R(-x_0)| \\
&= \int_{\partial B_1} \int_{I_\theta} r^{d-1} dr d\theta \\
&= \int_{\partial B_1} \int_{I_\theta} r^{d-1} |\varphi(r\theta) - \varphi(0)| dr d\theta \\
&\leq \int_{\partial B_1} \int_{I_\theta} r^{d-1} \left(\int_0^r |\nabla\varphi|(s\theta) ds \right) dr d\theta \\
&\leq \int_{\partial B_1} \int_{I_\theta} r^{d-1} \left(\int_0^{R_\theta} \frac{1}{s^{d-1}} |\nabla\varphi|(s\theta) s^{d-1} ds \right) dr d\theta.
\end{aligned}$$

Siccome

$$\int_{I_\theta} r^{d-1} dr \leq |I_r|(2R)^{d-1} \leq 2^d R^d,$$

otteniamo

$$|\{u = 0\} \cap B_R| \leq C_d |B_R| \int_{\partial B_1} \int_0^{R_\theta} \frac{1}{s^{d-1}} |\nabla\varphi|(s\theta) s^{d-1} ds d\theta = C_d |B_R| \int_{B_R} \frac{|\nabla u|(x)}{|x - x_0|^{d-1}} dx.$$

Integrando nella variabile $y = x_0$ su $\{u = 1\} \cap B_R$ otteniamo

$$\begin{aligned}
|\{u = 0\} \cap B_R| |\{u = 1\} \cap B_R| &\leq C_d |B_R| \int_{\{u=1\} \cap B_R} \int_{B_R} \frac{|\nabla u|(x)}{|x - y|^{d-1}} dx dy \\
&\leq C_d |B_R| \int_{B_R} |\nabla u|(x) \left(\int_{\{u=1\} \cap B_R} \frac{dy}{|x - y|^{d-1}} \right) dx \\
&\leq C_d |B_R| |\{u = 1\} \cap B_R|^{1/d} \int_{B_R} |\nabla u| dx,
\end{aligned}$$

dove nell'ultima disuguaglianza abbiamo usato il risultato dell'esercizio precedente. \square

Come corollario, otteniamo:

Lemma 9. *Siano $B_R \subset \mathbb{R}^d$ e $u \in H^1(B_R)$ una funzione tale che*

$$0 \leq u \leq 1 \quad \text{su } B_R.$$

Allora

$$|\{u = 0\} \cap B_R| |\{u = 1\} \cap B_R|^{1-1/d} \leq C_d |B_R| |\{0 < u < 1\} \cap B_R|^{1/2} \left(\int_{B_R} |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2},$$

dove C_d è una costante dimensionale. In particolare, se

$$\frac{|\{u = 0\} \cap B_R|}{|B_R|} \geq \frac{1}{2},$$

allora

$$|\{u = 1\} \cap B_R|^{1-1/d} \leq C_d |\{0 < u < 1\} \cap B_R|^{1/2} \left(\int_{B_R} |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2}.$$

La stima che useremo nella sezione successiva per completare la dimostrazione del teorema di De Giorgi è la seguente.

Proposizione 10. *Siano $B_R \subset \mathbb{R}^d$ e $u \in H^1(B_R)$ e sia $t \in \mathbb{R}$ tali che*

$$\frac{|\{u \leq t\} \cap B_R|}{|B_R|} \geq \frac{1}{2}.$$

Allora, per ogni $T > t$ si ha

$$|\{u \geq T\} \cap B_R|^{1-1/d} \leq C_d |\{t < u < T\} \cap B_R|^{1/2} \frac{1}{T-t} \left(\int_{B_R} |\nabla(u-t)_+|^2 dx \right)^{1/2},$$

dove C_d è una costante dimensionale.

5. CONTROLLO DELL'OSCILLAZIONE

Lemma 11. Sia $u \in H^1(B_{2R})$ una soluzione di

$$-\operatorname{div}(A(x)\nabla u) = 0 \quad \text{in } B_{2R},$$

dove la matrice A è tale che:

$$c_A \operatorname{Id} \leq A(x) \leq C_A \operatorname{Id} \quad \text{per ogni } x \in B_{2R}.$$

Esiste una costante $\eta \in (0, 1)$ tale che, se

$$\operatorname{osc}_{B_{2R}} u \leq 2,$$

allora

$$\operatorname{osc}_{B_{R/2}} u \leq 2 - \eta.$$

Proof. Possiamo supporre che

$$\max_{B_{2R}} u \leq 1 \quad \text{e} \quad \min_{B_{2R}} u \geq -1.$$

Osserviamo che ci sono due casi:

$$\frac{|\{u < 0\} \cap B_R|}{|B_R|} \leq \frac{1}{2} \quad \text{oppure} \quad \frac{|\{u > 0\} \cap B_R|}{|B_R|} \leq \frac{1}{2}.$$

Supponiamo di avere

$$\frac{|\{u > 0\} \cap B_R|}{|B_R|} \leq \frac{1}{2}.$$

Mostreremo che esiste una costante $\eta > 0$ tale che

$$(3) \quad u \leq 1 - \eta \quad \text{in } B_{R/2}.$$

Consideriamo la successione

$$T_k := 1 - \frac{1}{2^{k+1}} \quad \text{e} \quad M_k := |\{u > T_k\} \cap B_R|.$$

Osserviamo che la successione M_k è decrescente. Inoltre, per Proposizione 10 abbiamo la stima

$$(4) \quad M_{k+1}^{2-\frac{2}{d}} \leq C_d(M_k - M_{k+1})4^k \int_{B_R} |\nabla(u - T_k)_+|^2 dx \quad \text{per ogni } k \geq 0.$$

Step 1. Mostriamo che il termine

$$4^k \int_{B_R} |\nabla(u - T_k)_+|^2 dx$$

si può stimare con una costante che non dipende da k . Infatti, per la disuguaglianza di Caccioppoli abbiamo

$$\int_{B_R} |\nabla(u - T_k)_+|^2 dx \leq \frac{C_A}{c_A} \frac{C_d}{R^2} \int_{B_{2R}} (u - T_k)_+^2 dx$$

e siccome

$$(u - T_k)_+ \leq 1 - T_k \quad \text{su } B_{2R},$$

otteniamo che

$$\int_{B_R} |\nabla(u - T_k)_+|^2 dx \leq \frac{C_A}{c_A} \frac{C_d}{R^2} 4^{-k} |B_{2R}|.$$

e quindi

$$4^k \int_{B_R} |\nabla(u - T_k)_+|^2 dx \leq \frac{C_A}{c_A} \frac{C_d}{R^2} |B_{2R}|.$$

Sostituendo in (4), otteniamo

$$M_{k+1}^{2-\frac{2}{d}} \leq \frac{C_A}{c_A} C_d R^{d-2} (M_k - M_{k+1}) \quad \text{per ogni } k \geq 0.$$

Step 2. Sommando queste disuguaglianze per $k = 0, \dots, N-1$, otteniamo

$$NM_N^{2-\frac{2}{d}} \leq \sum_{k=0}^{N-1} M_{k+1}^{2-\frac{2}{d}} \leq \frac{C_A}{c_A} C_d R^{d-2} \sum_{k=0}^{N-1} (M_k - M_{k+1}) \leq \frac{C_A}{c_A} C_d R^{d-2} \leq \frac{C_A}{c_A} C_d R^{2d-2},$$

ovvero

$$M_N^{\frac{2d-2}{d}} \leq \frac{C_A}{c_A} \frac{C_d}{N} R^{2d-2}$$

che possiamo scrivere anche come

$$M_N \leq C_d \left(\frac{C_A}{c_A} \frac{1}{N} \right)^{\frac{d}{2d-2}} |B_R|.$$

Conclusione. Infine, dalla stima $L^2 - L^\infty$ si ottiene che

$$\|(u - T_N)_+\|_{L^\infty(B_{R/2})}^2 \leq \left(\frac{C_A}{c_A} \right)^{d/2} C_d \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} (u - T_N)_+^2 dx \leq \left(\frac{C_A}{c_A} \right)^{d/2} C_d \left(\frac{C_A}{c_A} \frac{1}{N} \right)^{\frac{d}{2d-2}} (1 - T_N)^2.$$

Ora, poniamo

$$\varepsilon^2 := C_d \left(\frac{C_A}{c_A} \right)^{\frac{1}{2(d-1)}} \left(\frac{1}{N} \right)^{\frac{d}{2d-2}}.$$

e osserviamo che scegliendo N abbastanza grande (in funzione di $\frac{C_A}{c_A}$ e la dimensione d), abbiamo

$$0 < \varepsilon < 1.$$

Ora, calcoliamo

$$\begin{aligned} \|u_+\|_{L^\infty(B_{R/2})} &\leq T_N + \|(u - T_N)_+\|_{L^\infty(B_{R/2})} \\ &\leq T_N + \varepsilon(1 - T_N) \\ &= 1 - (1 - \varepsilon)(1 - T_N), \end{aligned}$$

che conclude la dimostrazione di (3) con

$$\eta = (1 - \varepsilon)(1 - T_N).$$

Osserviamo che η è una costante che dipende solo dalla dimensione d e del rapporto $\frac{C_A}{c_A}$. □